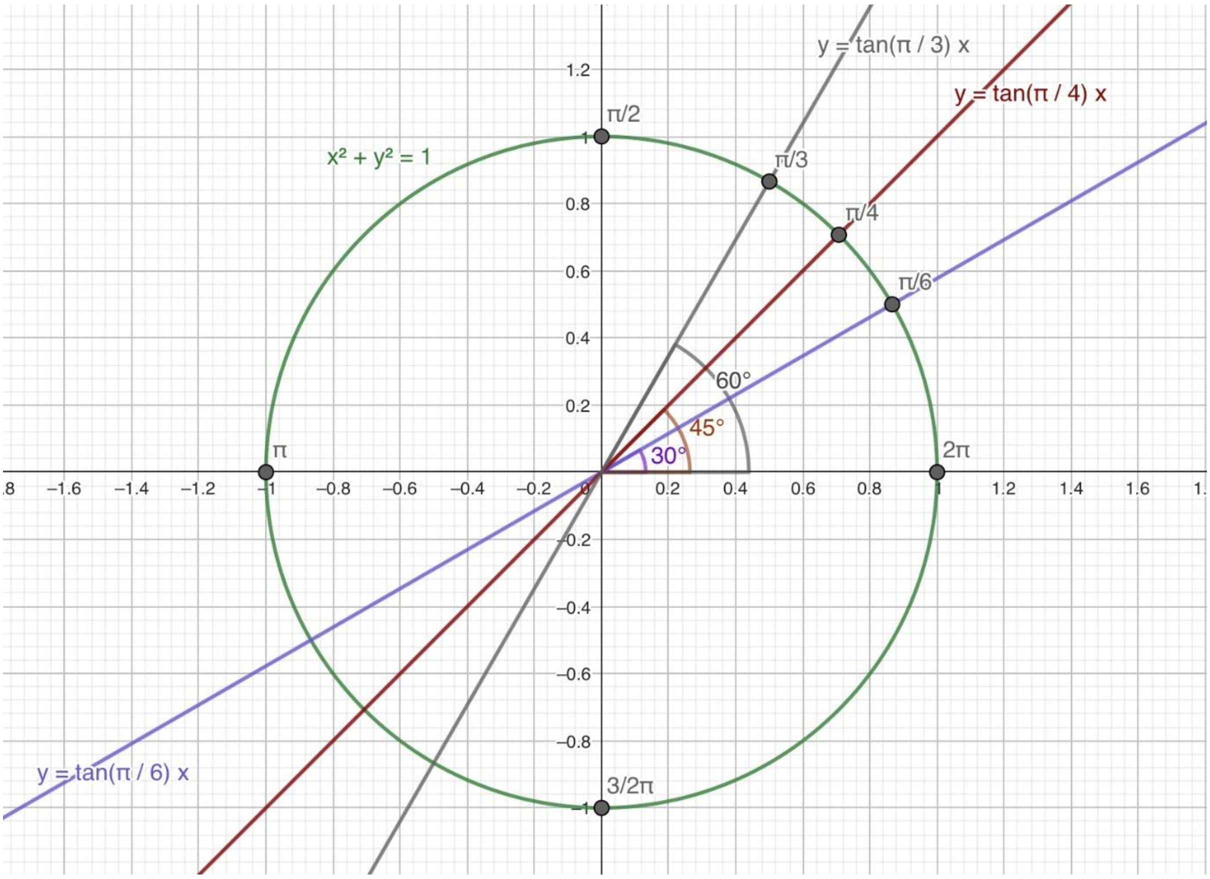
Matematica: la circonferenza goniometrica.



La circonferenza goniometrica è una circonferenza con raggio unitario e centro nell'origine degli assi cartesiani. Perché è tanto importante nello studio delle funzioni goniometriche?

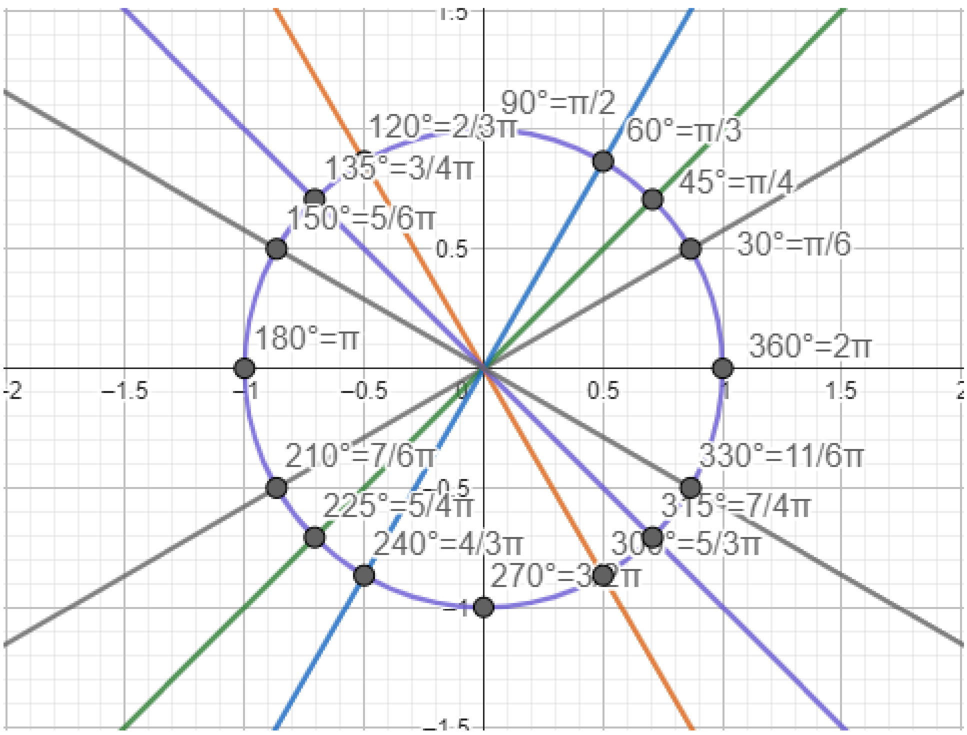
Perché attraverso questa rappresentazione grafica si possono definire delle relazioni tra gli angoli associati ai punti della circonferenza goniometrica e le funzioni trigonometriche, a partire dalle funzioni seno, coseno e tangente.

Come si calcola la circonferenza di un cerchio?

La **circonferenza** è uguale a $2\pi r$, dove π è la costante pi greco (circa 3,14) che rappresenta una costante matematica, pari al rapporto tra la circonferenza e il diametro ($2r$).

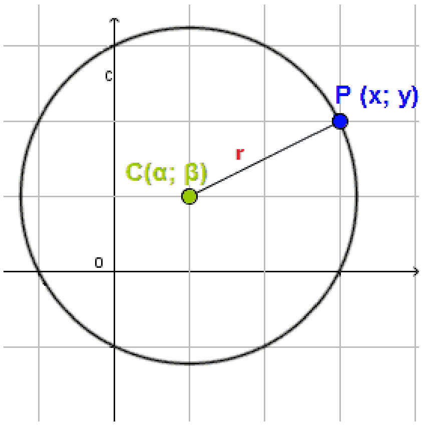
$$\pi = \frac{C}{2r} \qquad C = 2\pi r$$

Vediamo che, nella circonferenza goniometrica, essendo il raggio uguale all'unità, la circonferenza è pari a 2π:



L'**area** di un cerchio si calcola invece con la seguente formula: **Area =** πr^2

Vediamo ora l'equazione della circonferenza dove α e β sono ascissa e ordinata del centro:



Un generico punto P di coordinate x ed y, apparterrà alla circonferenza soltanto se la sua distanza dal centro C è pari alla misura del raggio r.

Ricordiamoci ora che la distanza tra due punti sul piano cartesiano

$$P_1\ (x_1; y_1)$$

$$P_2\ (x_2; y_2)$$

si calcola attraverso la formula

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Quindi, la distanza tra il punto $P(x; y)$ e il punto $C(\alpha; \beta)$ è uguale a:

$$\overline{PC} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

Affinché il punto P appartenga alla circonferenza, è necessario che tale distanza sia uguale al raggio:

$$\overline{PC} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

Da cui otteniamo l'equazione della circonferenza, in forma implicita:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Svolgendo i calcoli (formula del quadrato di un binomio):

$$x^2 + \alpha^2 - 2x\alpha + y^2 + \beta^2 - 2y\beta = r^2$$

$$x^2 + \alpha^2 - 2x\alpha + y^2 + \beta^2 - 2y\beta - r^2 = 0$$

Poniamo:

$$-2\alpha = a$$

$$-2\beta = b$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$$

La nostra equazione diventerà:

$$x^2 + \alpha^2 - 2x\alpha + y^2 + \beta^2 - 2y\beta - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Quindi l'equazione della circonferenza, nella sua forma canonica o esplicita, sarà:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

con $a = -2\alpha; b = -2\beta; c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

Nella sua forma implicita invece, come abbiamo già visto, la circonferenza ha la seguente equazione:

$$(x - x_\alpha)^2 + (y - y_\beta)^2 = r^2$$

Poiché abbiamo detto per definizione che la circonferenza goniometrica ha centro nell'origine, queste due coordinate cartesiane sono pari a 0. Tenendo conto anche che il raggio è pari a 1, l'equazione della circonferenza goniometrica può riscriversi come:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Abbiamo detto che la circonferenza goniometrica rappresenta il punto di partenza per le funzioni goniometriche. In particolare, il suo studio ci permette di individuare una corrispondenza tra gli angoli e i punti appartenenti alla circonferenza stessa.

Teniamo sempre ben presente la relazione fondamentale tra i lati di un triangolo rettangolo definita dal Teorema di Pitagora (che c'entra sempre):

$$c^2 = a^2 + b^2$$