Matematica: equazioni trigonometriche – trigonometria.

6) Le soluzioni dell'equazione trigonometrica $\sin x = \frac{1}{\sin x}$ sono:
A) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, per ogni valore intero di k
B) nessuna delle altre risposte
C) $x = k\frac{\pi}{2}$, per ogni valore intero di k
D) $x = 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, per ogni valore intero di k
E) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, per ogni valore intero di k

Le funzioni trigonometriche mettono in relazione l'ampiezza dell'angolo con la lunghezza dei segmenti proiettati sugli assi.
La proiezione del punto P sull'asse delle ordinate (Y) individua un segmento detto seno.
La proiezione del punto P sull'asse delle ascisse (X) individua un segmento detto coseno.

Seno e coseno rappresentano le due funzioni goniometriche fondamentali. Esse sono definite funzioni periodiche, perché i loro valori si ripetono con una certa periodicità, pari a 2π.

Dobbiamo avere ben chiari i concetti di base della goniometria (che studia gli angoli in relazione agli archi associati – circonferenza goniometrica) e della trigonometria (che studia e mette in relazione gli angoli e i lati di un triangolo qualsiasi).

La prima cosa a cui dobbiamo pensare quando ci troviamo di fronte ad un quesito matematico sono le **C**ondizioni di **E**sistenza, ovvero le condizioni che una funzione (radice, frazione, equazione, ecc.) deve rispettare affinché non perda significato (in genere nell'insieme dei numeri Reali $\mathbb{R}$).

Quindi, nel nostro quesito, sappiamo che una frazione è definita a patto che il denominatore sia diverso da zero:

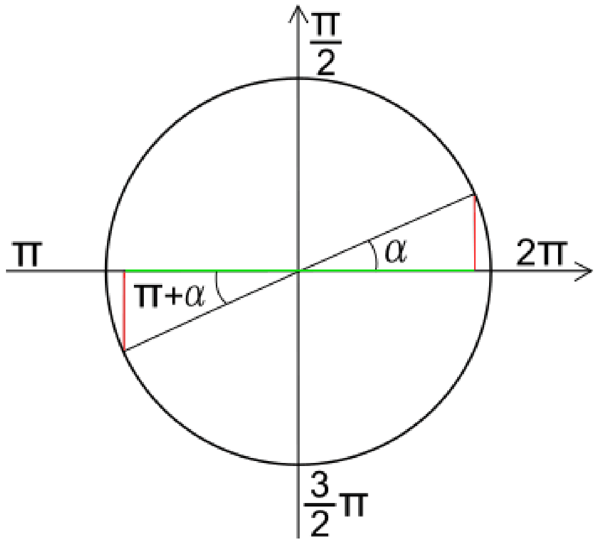
$$\sin(x) \neq 0$$

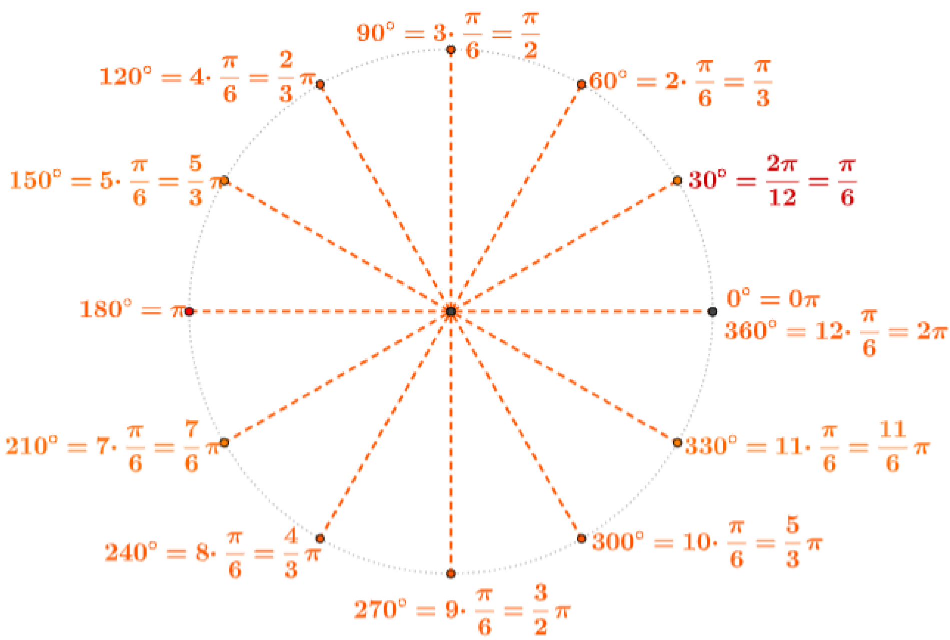
A quali valori x $\boldsymbol{\sin x}$ assume un valore pari a zero? Vediamo che in corrispondenza di π e 2π il seno assume valore pari a zero e così sarà ogni volta che si compie il mezzo giro della circonferenza goniometrica ($\pi = 180°$).

$$\text{Quindi } \mathbf{CE} \text{ di } \frac{1}{\sin x} = x \neq k\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

Una volta trovate le soluzioni dell'equazione verificheremo che e stesse rispettino le condizioni di esistenza.

Prima di andare avanti rinfreschiamoci velocemente le idee...



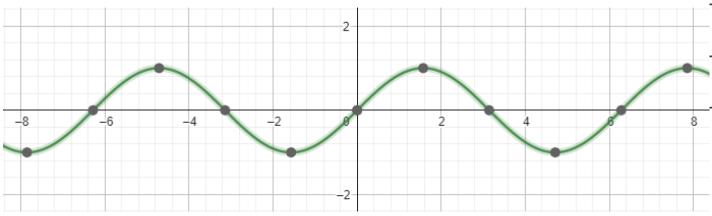
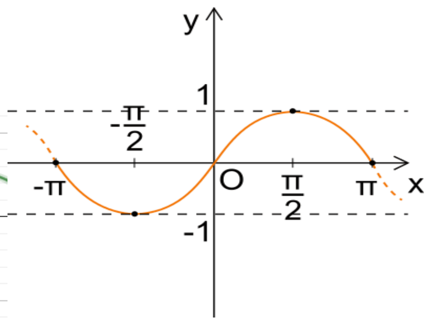


Procediamo con lo svolgimento del quesito: per semplificare sostituiamo t con $\sin(x)$.

$$t = \frac{1}{t}$$

Le soluzioni saranno $t = \pm 1$

Quindi le soluzioni della nostra equazione saranno $\sin(x) = \pm 1$... per quali x il seno di x è uguale a $+1$ o a -1 ?

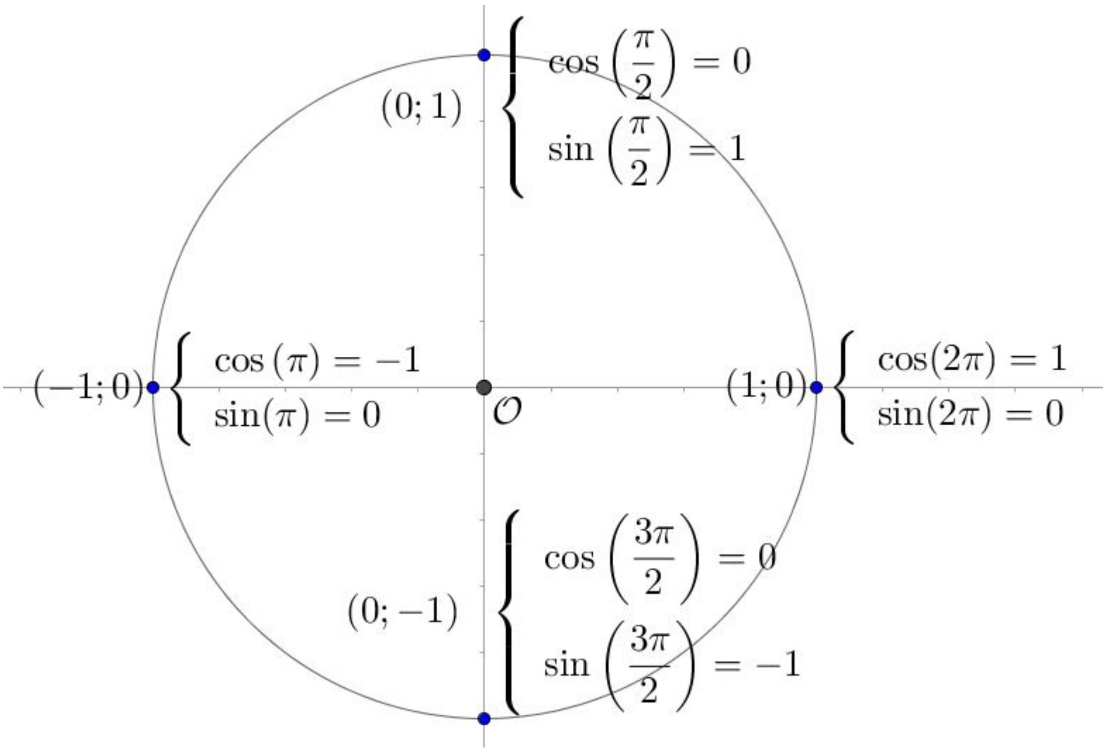



Sappiamo che il seno di un angolo può assumere valori compresi tra −1 e +1.

Sappiamo anche che il seno, come il coseno, si ripete dopo 1 giro completo della circonferenza, ovvero ogni 360° o, in radianti, ogni 2π. Quindi, prendendo un angolo α e aumentandolo o diminuendolo di un giro completo (360°, 2π) le due funzioni goniometriche restano inalterate, non cambiano valore. La funzione goniometrica tangente invece si ripete ogni mezzo giro (180°, π).

Questo ripetersi è definito come **periodicità** della funzione. Possiamo quindi dire che la funzione seno è periodica di periodo pari a 360° (2π).

gradi	*radianti*
0°	0
30°	π/6
45°	π/4
60°	π/3
90°	π/2
180	π
270°	3π/2
360°	2π



A questo punto possiamo verificare che

$\sin(x) = 1$ per $x = \frac{\pi}{2}$ e, considerando la periodicità del seno pari a 2π, per $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ per ogni valore intero di k

e

$\sin(x) = -1$ per $x = \frac{3\pi}{2}$ e, considerando la periodicità del seno pari a 2π, per $x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ per ogni valore intero di k.

Troviamo l'unione delle due soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ per ogni valore intero di } k \ (\forall k \in \mathbb{Z})$$

Troviamo l'intersezione con le **C**ondizioni di **E**sistenza, ovvero verifichiamo che le soluzioni trovate soddisfino le condizioni di esistenza:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \ ; \ x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Verifichiamo facilmente che le condizioni di esistenza sono soddisfatte (x sarà sempre diverso da $k\pi$).

Quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$

La risposta corretta è la **A**: le soluzioni dell'equazione trigonometrica $\sin x = \frac{1}{\sin x}$ sono

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ per ogni valore intero di } k$$